第 37 講　数列(2)

例題 37 − 1

(1)　次の和を項を書き並べて表せ.

(ア)　$\sum_{k=1}^{5}(2k-1)$　　(イ)　$\sum_{k=1}^{6}2^k$

(2)　次の数列の和を記号 Σ を用いて表せ.

(ア)　$1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ \cdots\cdots,\ n^2$　　(イ)　$1\cdot2,\ 2\cdot3,\ 3\cdot4,\ \cdots\cdots,\ (n-1)\cdot n$

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題 37 ー 1

(1)　次の和を項を書き並べて表せ.

(ア)　$\sum_{k=1}^{4}(3k+1)$　　(イ)　$\sum_{k=1}^{5}3^{k-1}$

(2)　次の数列の和を記号 Σ を用いて表せ.

(ア)　$1^3,\ 2^3,\ 3^3,\ \cdots\cdots,\ n^3$　　(イ)　$1\cdot1,\ 3\cdot2,\ 5\cdot4,\ \cdots\cdots,\ (2n+1)\cdot2^n$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題 37 － 2

次の和を求めよ.

(1)　$\sum_{k=1}^{n}(2k+3)$　(2)　$\sum_{k=1}^{n}2^k$　(3)　$\sum_{k=1}^{n}(3k^2+k-4)$

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題 37 － 2

次の和を求めよ．

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(4k-1)$　(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}2\cdot 3^k$　(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k-1)(k-5)$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題 37 − 3

次の数列の和を求めよ.

(1)　1, 6, 11, ……, $5n-4$　　(2)　1, 2, 4, 8, ……, 2^n

(3)　1^2, 3^2, 5^2, ……, $(2n-1)^2$

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題 37 － 3

次の数列の和を求めよ.

(1)　$1,\ 4,\ 7,\ \cdots\cdots,\ 3n-5$

(2)　$2,\ 8,\ 32,\ \cdots\cdots,\ 2\cdot 4^{n-1}$

(3)　$1\cdot 1,\ 2\cdot 4,\ 3\cdot 7,\ \cdots\cdots,\ n(3n-2)$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題 37 − 4

次の数列の一般項 a_n を求めよ.

(1)　1, 4, 8, 13, 19, ……

(2)　1, 2, 5, 14, 41, ……

【Point Pickup】

ⓒRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題 37 ー 4

次の数列の一般項 a_n を求めよ.

(1)　2, 6, 12, 20, 30, ……　　(2)　5, 7, 11, 19, 35, ……

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 37 講　数列(2)

(1)　次の和を求めよ.

(i)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-7)=n(n-\boxed{ア})$　　(ii)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}4^k=\frac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}}(4^n-1)$

(2)　数列 1・2，2・3，3・4，…… の初項から第 n 項までの和は

$\dfrac{1}{\boxed{エ}}n(n+\boxed{オ})(n+\boxed{カ})$ である. ただし，$\boxed{オ}<\boxed{カ}$ とする.

(3)　数列 $\{a_n\}$：1，11，111，1111，…… の一般項は $\dfrac{\boxed{キク}^n-\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}$ である.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 37 講　数列(2)

例題 37 － 1

(1)　次の和を項を書き並べて表せ.

(ア)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{5}(2k-1)$　　(イ)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{6}2^k$

(2)　次の数列の和を記号 $\sum$ を用いて表せ.

(ア)　$1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ \cdots\cdots,\ n^2$　　(イ)　$1\cdot2,\ 2\cdot3,\ 3\cdot4,\ \cdots\cdots,\ (n-1)\cdot n$

(1)　(ア)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{5}(2k-1)=\mathbf{1+3+5+7+9}$

(イ)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{6}2^k=\mathbf{2+4+8+16+32+64}$

(2)　(ア)　$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\boldsymbol{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2}$

(イ)　$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots\cdots+(n-1)\cdot n=\boldsymbol{\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}k(k+1)}$

類題 37 － 1

(1)　次の和を項を書き並べて表せ.

(ア)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{4}(3k+1)$　　(イ)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{5}3^{k-1}$

(2)　次の数列の和を記号 $\sum$ を用いて表せ.

(ア)　$1^3,\ 2^3,\ 3^3,\ \cdots\cdots,\ n^3$　　(イ)　$1\cdot1,\ 3\cdot2,\ 5\cdot4,\ \cdots\cdots,\ (2n+1)\cdot2^n$

(1)　(ア)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{4}(3k+1)=\mathbf{4+7+10+13}$

(イ)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{5}3^{k-1}=\mathbf{1+3+9+27+81}$

(2)　(ア)　$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=\boldsymbol{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3}$

(イ)　$1\cdot1+3\cdot2+5\cdot4+\cdots\cdots+(2n+1)\cdot2^n=\boldsymbol{\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)\cdot2^{k-1}}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題 37 ー 2

次の和を求めよ.

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k+3)$　(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}2^k$　(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(3k^2+k-4)$

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k+3)=2\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}3=2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+3n=n^2+4n=\boldsymbol{n(n+4)}$

(別解) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k+3)=5+7+9+\cdots\cdots+(2n+3)=\frac{1}{2}n\{5+(2n+3)\}$

$\displaystyle=\frac{1}{2}n(2n+8)=n(n+4)$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}2^k=\frac{2(2^n-1)}{2-1}=\boldsymbol{2^{n+1}-2}$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(3k^2+k-4)=3\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}4$

$\displaystyle=3\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)-4n$

$\displaystyle=\frac{1}{2}n\{(n+1)(2n+1)+(n+1)-8\}$

$\displaystyle=\frac{1}{2}n(2n^2+4n-6)=n(n^2+2n-3)=\boldsymbol{n(n+3)(n-1)}$

類題 37 ー 2

次の和を求めよ.

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(4k-1)$　(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}2\cdot3^k$　(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k-1)(k-5)$

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(4k-1)=4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-n=2n^2+n=\boldsymbol{n(2n+1)}$

(別解) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(4k-1)=3+7+11+\cdots\cdots+(4n-1)=\frac{1}{2}n\{3+(4n-1)\}$

$\displaystyle=\frac{1}{2}n(4n+2)=n(2n+1)$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}2\cdot3^k=\frac{6(3^n-1)}{3-1}=3(3^n-1)=\boldsymbol{3^{n+1}-3}$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k-1)(k-5)=\sum_{k=1}^{n}(k^2-6k+5)$

$\displaystyle=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-6\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+5n$

$\displaystyle=\frac{1}{6}n\{(n+1)(2n+1)-18(n+1)+30\}$

$\displaystyle=\frac{1}{6}n(2n^2-15n+13)=\boldsymbol{\frac{1}{6}n(2n-13)(n-1)}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題 37 ー 3

次の数列の和を求めよ.

(1)　1, 6, 11, ……, $5n-4$　　(2)　1, 2, 4, 8, ……, 2^n

(3)　1^2, 3^2, 5^2, ……, $(2n-1)^2$

(1)　$1+6+11+\cdots\cdots+(5n-4)=\sum_{k=1}^{n}(5k-4)$

$$=5\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-4n=\frac{1}{2}n\{5(n+1)-8\}=\boldsymbol{\frac{1}{2}n(5n-3)}$$

(2)　$1+2+4+8+\cdots\cdots+2^n=\sum_{k=1}^{n+1}2^{k-1}=\frac{1\cdot(2^{n+1}-1)}{2-1}=\boldsymbol{2^{n+1}-1}$

(3)　$1^2+3^2+5^2+\cdots\cdots+(2n-1)^2=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2=\sum_{k=1}^{n}(4k^2-4k+1)$

$$=4\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n$$

$$=\frac{1}{3}n\{2(n+1)(2n+1)-6(n+1)+3\}$$

$$=\frac{1}{3}n(4n^2-1)=\boldsymbol{\frac{1}{3}n(2n+1)(2n-1)}$$

類題 37 ー 3

次の数列の和を求めよ.

(1)　1, 4, 7, ……, $3n-5$　　(2)　2, 8, 32, ……, $2\cdot4^{n-1}$

(3)　$1\cdot1$, $2\cdot4$, $3\cdot7$, ……, $n(3n-2)$

(1)　$1+4+7+\cdots\cdots+(3n-5)=\sum_{k=1}^{n-1}(3k-2)$

$$=3\cdot\frac{1}{2}(n-1)n-2(n-1)$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}(3n-4)(n-1)}$$

(2)　$2+8+32+\cdots\cdots+2\cdot4^{n-1}=\frac{2(4^n-1)}{4-1}=\boldsymbol{\frac{2}{3}(4^n-1)}$

(3)　$1\cdot1+2\cdot4+3\cdot7+\cdots\cdots+n(3n-2)=\sum_{k=1}^{n}k(3k-2)=\sum_{k=1}^{n}(3k^2-2k)$

$$=3\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$=\frac{1}{2}n(n+1)\{(2n+1)-2\}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}n(n+1)(2n-1)}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題 37 ― 4

次の数列の一般項 a_n を求めよ．

(1)　1，4，8，13，19，……　　(2)　1，2，5，14，41，……

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とする

(1)　$\{b_n\}$：3，4，5，6，…… より，数列 $\{b_n\}$ は初項 3，公差 1 の等差数列

よって　$b_n=3+(n-1)\cdot 1=n+2$

$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=1+\sum_{k=1}^{n-1}(k+2)=1+\frac{1}{2}(n-1)n+2(n-1)=\frac{1}{2}(n^2+3n-2)\quad\cdots\cdots①$$

①で $n=1$ のとき　$\frac{1}{2}(1^2+3\cdot 1-2)=1=a_1$　より，①は $n=1$ のときも成り立つ．

したがって　$\boldsymbol{a_n=\frac{1}{2}(n^2+3n-2)}$

(2)　$\{b_n\}$：1，3，9，27，…… より，数列 $\{b_n\}$ は初項 1，公比 3 の等比数列

よって　$b_n=1\cdot 3^{n-1}=3^{n-1}$

$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=1+\sum_{k=1}^{n-1}3^{k-1}=1+\frac{1\cdot(3^{n-1}-1)}{3-1}=\frac{1}{2}(3^{n-1}+1)\quad\cdots\cdots①$$

①で $n=1$ のとき　$\frac{1}{2}(3^0+1)=1=a_1$　より，①は $n=1$ のときも成り立つ．

したがって　$\boldsymbol{a_n=\frac{1}{2}(3^{n-1}+1)}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

類題 37 － 4

次の数列の一般項 a_n を求めよ.

(1)　2, 6, 12, 20, 30, ……　　(2)　5, 7, 11, 19, 35, ……

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とする

(1)　$\{b_n\}$: 4, 6, 8, 10, …… より, 数列 $\{b_n\}$ は初項 4, 公差 2 の等差数列

よって　$b_n=4+(n-1)\cdot 2=2n+2$

$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=2+\sum_{k=1}^{n-1}(2k+2)=2+2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n+2(n-1)=n^2+n \quad \cdots\cdots①$$

①で $n=1$ のとき　$1^2+1=2=a_1$　より, ①は $n=1$ のときも成り立つ.

したがって　$\boldsymbol{a_n=n^2+n=n(n+1)}$

(2)　$\{b_n\}$: 2, 4, 8, 16, …… より, 数列 $\{b_n\}$ は初項 2, 公比 2 の等比数列

$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=5+\sum_{k=1}^{n-1}2^k=5+\frac{2\cdot(2^{n-1}-1)}{2-1}=2^n+3 \quad \cdots\cdots①$$

①で $n=1$ のとき　$2^1+3=5=a_1$　より, ①は $n=1$ のときも成り立つ.

したがって　$\boldsymbol{a_n=2^n+3}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 37 講　数列(2)

(1)　次の和を求めよ．

(i)　$\sum_{k=1}^{n}(2k-7)=n(n-\boxed{ア})$　　(ii)　$\sum_{k=1}^{n}4^k=\frac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}}(4^n-1)$

(2)　数列 1･2，2･3，3･4，…… の初項から第 n 項までの和は

$\frac{1}{\boxed{エ}}n(n+\boxed{オ})(n+\boxed{カ})$ である．ただし，$\boxed{オ}<\boxed{カ}$ とする．

(3)　数列 $\{a_n\}$：1，11，111，1111，…… の一般項は $\frac{\boxed{キク}^n-\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}$ である．

解答例

(1)　(i)　$\sum_{k=1}^{n}(2k-7)=2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-7n=n^2-6n=n(n-\mathbf{6})$

(ii)　$\sum_{k=1}^{n}4^k=\frac{4(4^n-1)}{4-1}=\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}(4^n-1)$

(2)　$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots\cdots+n(n+1)=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)+3\}$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+4)=\frac{1}{\mathbf{3}}n(n+\mathbf{1})(n+\mathbf{2})$$

(3)　数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とする．

$\{b_n\}$：10，100，1000，…… より，数列 $\{b_n\}$ は初項 10，公比 10 の等比数列である．

よって　$b_n=10\cdot10^{n-1}=10^n$

$n\geqq2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=1+\sum_{k=1}^{n-1}10^k=1+\frac{10\cdot(10^{n-1}-1)}{10-1}=1+\frac{10^n-10}{9}=\frac{10^n-1}{9}\quad\cdots\cdots①$$

①で $n=1$ のとき　$\frac{10^1-1}{9}=1=a_1$　より，①は $n=1$ のときも成り立つ．

したがって　$a_n=\frac{\mathbf{10}^n-\mathbf{1}}{\mathbf{9}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。